

Модел. и анализ информ. систем. Т. 21, № 5 (2014) 131–147

©Шапеев В. П., Ворожцов Е. В., 2014

УДК 519.63.4:532.51.5

Применение систем компьютерной алгебры для построения метода коллокаций и наименьших невязок решения трехмерных уравнений Навье–Стокса

Шапеев В. П., Ворожцов Е. В.¹

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН
630090 Россия, г. Новосибирск, ул. Институтская, 4/1*

e-mail: vshapeev@ngs.ru, vorozh@itam.nsc.ru

получена 12 февраля 2014

Ключевые слова: трехмерные уравнения Навье–Стокса, метод коллокаций и наименьших невязок, компьютерная алгебра, течение в кубической каверне, подпространства Крылова

Метод коллокаций и наименьших невязок (КНН), предложенный ранее для численного решения двумерных уравнений Навье–Стокса, описывающих стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости, обобщен здесь на трехмерный случай. В реализованном варианте метода решение ищется в виде разложения по базисным соленоидальным функциям. На всех этапах построения метода КНН применяется система компьютерной алгебры (СКА): для вывода и верификации формул метода и для их перевода в арифметические операторы языка Фортран. Для ускорения сходимости итераций предложен достаточно универсальный и простой в реализации алгоритм, основанный на использовании подпространств Крылова. Полученные расчетные формулы метода КНН были верифицированы на точном аналитическом решении тестовой задачи. Сравнения с опубликованными результатами численных расчетов эталонной задачи о течении жидкости в кубической каверне показывают, что точность результатов, полученных по методу КНН, соответствует высокоточным известным решениям.

Введение

В решениях многих задач динамики жидкостей и газов, описываемых математической моделью уравнений Навье–Стокса и изучаемых в настоящее время, зачастую имеются особенности в поведении решений: узкие пограничные слои, разрывы в краевых условиях, свободные границы и т.д. Такие особенности предъявляют повышенные требования к свойствам численных методов, применяемых для решения

¹Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ (код проекта 13–01–00227).

задач, и стимулируют поиск новых. Перечислим наиболее употребительные в настоящее время численные методы решения уравнений Навье–Стокса, описывающих течения вязкой несжимаемой жидкости: (1) проекционные конечно-разностные методы [1–4]; (2) проекционные методы конечного объема [2, 4]; (3) методы конечных элементов [5]; (4) методы искусственной сжимаемости [2, 6]; (5) методы дискретных вихрей [3].

Метод коллокаций и наименьших невязок (КНН) численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений возник недавно [7–11]. Он является проекционно-сеточным методом. В нем решение в каждой ячейке разностной сетки ищется в виде линейной комбинации базисных элементов некоторого функционального пространства. В качестве последнего в силу определенных удобств, в основном, используется пространство многочленов. Метод КНН отличается от других численных методов тем, что численное решение задачи сводится к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решение последней ищется из требования минимизации функционала невязки уравнений задачи на ее численном решении. Вследствие такого комбинирования метода коллокаций с “сильным” требованием к решению дискретной задачи улучшаются его свойства (гладкость, точность) в сравнении с решениями, получаемыми простым методом коллокаций. На самом деле метод КНН обладает и другими улучшенными свойствами в сравнении с методом коллокаций. В частности, минимизация функционала невязки способствует подавлению (демпфированию) различных возмущений, возникающих в процессе решения задачи, и ускоряет сходимость решения при итерационном способе его построения.

В данной работе описывается новый вариант метода КНН решения трехмерных уравнений Навье–Стокса. В этой версии метода решение ищется в виде многочленов второй степени от трех независимых переменных. При разработке метода учитывались три существенных обстоятельства. Во-первых, базис, состоящий из соленоидальных многочленов, использовавшихся для представления решения, содержит 30 элементов. Во-вторых, система трехмерных уравнений Навье–Стокса сама по себе является сложным нелинейным аналитическим объектом. В-третьих, для улучшения свойств численного решения в методе КНН требуется, чтобы на решении задачи достигался минимум функционала невязок уравнений задачи. Эти обстоятельства требуют от математика-вычислителя на этапе создания формул метода выполнения значительных по объему выкладок в символьном виде, их проверки и реализации на языке программирования численного решения задач на ЭВМ (ФОРТРАНЕ, СИ и др.).

Вышеуказанные обстоятельства обуславливают необходимость использования систем компьютерной алгебры. Тот факт, что символьные операции над дробно-рациональными выражениями реализованы достаточно хорошо в ведущих СКА, делает эффективным их использование при разработке новых методов, в частности КНН.

Основной целью настоящей работы является построение модифицированного метода КНН для численного решения трехмерных стационарных уравнений Навье–Стокса. Поскольку практическая реализация данного метода была бы невозможной без применения СКА, подробно описываются этапы перевода формул аналитическо-

го решения, матричных элементов и других выражений в форму арифметических операторов.

1. Описание модифицированного метода КНН

1.1. Постановка задачи

Рассмотрим систему стационарных уравнений Навье–Стокса

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \nabla p = (1/\text{Re})\Delta\mathbf{V} - \mathbf{f}, \quad \text{div } \mathbf{V} = 0, \quad (x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \quad (1)$$

описывающих течения вязкой нетеплопроводной несжимаемой жидкости в кубе

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3), 0 \leq x_i \leq X, i = 1, 2, 3\} \quad (2)$$

с границей $\partial\Omega$, где $X > 0$ — заданная пользователем длина ребра кубической области Ω , а x_1, x_2, x_3 — декартовы пространственные координаты. В уравнениях (1) $\mathbf{V} = \mathbf{V}(x_1, x_2, x_3)$ — вектор скорости, имеющий составляющие $v_1(x_1, x_2, x_3), v_2(x_1, x_2, x_3), v_3(x_1, x_2, x_3)$ вдоль осей x_1, x_2, x_3 соответственно; $p = p(x_1, x_2, x_3)$ — давление, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ — заданная вектор-функция. Положительная постоянная Re — число Рейнольдса, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$, $(\mathbf{V} \cdot \nabla) = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$.

Четыре уравнения (1) решаются при граничном условии Дирихле $\mathbf{V}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g}$, где $\mathbf{g} = \mathbf{g}(x_1, x_2, x_3) = (g_1, g_2, g_3)$ — заданная вектор-функция, и при заданном значении давления в одной из точек на Ω . Вместо последнего можно использовать, как это сделано в [9, 10], аппроксимацию условия для давления, предложенного Темамом.

1.2. Локальные координаты и базисные функции

Сформулируем “дискретную” задачу, аппроксимирующую исходную дифференциальную краевую задачу. В методе КНН в пространственной расчетной области (2) строится разностная сетка. Для простоты здесь ее берем с кубическими ячейками $\Omega_{i,j,k}$, где индексы i, j, k изменяются вдоль осей, соответственно, x_1, x_2, x_3 . Решение ищется на этой сетке в виде кусочно-гладкой функции. Для записи формул метода КНН удобно ввести в каждой ячейке $\Omega_{i,j,k}$ локальные координаты y_1, y_2, y_3 . Их зависимость от глобальных пространственных переменных x_1, x_2, x_3 определяется соотношениями $y_m = (x_m - x_{m,i,j,k})/h$, $m = 1, 2, 3$, где $x_{m,i,j,k}$ — значение координаты x_m в геометрическом центре ячейки $\Omega_{i,j,k}$, а $h = X/(2M)$ — половина длины ребра кубической ячейки $\Omega_{i,j,k}$, M — количество ячеек в каждом пространственном направлении. Локальные координаты изменяются в промежутке $y_m \in [-1, 1]$. Теперь введем обозначения $\mathbf{u}(y_1, y_2, y_3) = \mathbf{V}(hy_1 + x_{1,i,j,k}, hy_2 + x_{2,i,j,k}, hy_3 + x_{3,i,j,k})$, $p(y_1, y_2, y_3) = p(hy_1 + x_{1,i,j,k}, hy_2 + x_{2,i,j,k}, hy_3 + x_{3,i,j,k})$. После этой замены переменных уравнения Навье–Стокса принимают следующий вид:

$$\Delta u_m - \text{Re}h \left(u_1 \frac{\partial u_m}{\partial y_1} + u_2 \frac{\partial u_m}{\partial y_2} + u_3 \frac{\partial u_m}{\partial y_3} + \frac{\partial p}{\partial y_m} \right) = \text{Re} \cdot h^2 f_m, \quad (3)$$

$$\frac{1}{h} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y_1} + \frac{\partial u_2}{\partial y_2} + \frac{\partial u_3}{\partial y_3} \right) = 0, \quad (4)$$

Таблица 1. Вид базисных функций φ_l

l	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
φ_l	1	0	0	y_1	0	0	y_2	0	0	y_3
	0	1	0	$-y_2$	y_1	0	0	y_2	0	0
	0	0	1	0	0	y_1	0	$-y_3$	y_2	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
φ_l	0	y_1^2	0	0	$-2y_1y_2$	0	$-2y_1y_3$	0	y_1^2	y_2^2
	y_3	$-2y_1y_2$	y_1^2	0	y_2^2	0	0	y_1y_3	0	0
	0	0	0	y_1^2	0	y_1y_2	y_3^2	0	$-2y_1y_3$	0
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
l	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
φ_l	0	0	y_2y_3	0	y_3^2	0	0	0	0	0
	y_2^2	0	0	$-2y_2y_3$	0	y_3^2	0	0	0	0
	$-2y_2y_3$	y_2^2	0	y_3^2	0	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	1	y_1	y_2	y_3

где $\Delta = \partial^2/\partial y_1^2 + \partial^2/\partial y_2^2 + \partial^2/\partial y_3^2$, $m = 1, 2, 3$.

Дискретную задачу, соответствующую дифференциальной задаче, в методе КНН будем решать итерационно. Полагая, что решение известно на s -й итерации, начиная с “нулевого” приближения, линеаризуем уравнения (3) по Ньютону в отличие от [11] непосредственно в терминах искоемых неизвестных величин на следующей $s + 1$ -й итерации:

$$\xi [\Delta u_m^{s+1} - (\text{Re} \cdot h) (u_1^s u_{m,y_1}^{s+1} + u_1^{s+1} u_{m,y_1}^s + u_2^s u_{m,y_2}^{s+1} + u_2^{s+1} u_{m,y_2}^s + u_3^s u_{m,y_3}^{s+1} + u_3^{s+1} u_{m,y_3}^s + p_{y_m}^{s+1})] = \xi F_m, \quad m = 1, 2, 3, \quad (5)$$

где s — номер итерации, $s = 0, 1, 2, \dots$, $F_m = \text{Re}[h^2 f_m - h(u_1^s u_{m,y_1}^s + u_2^s u_{m,y_2}^s + u_3^s u_{m,y_3}^s)]$, $u_{m,y_l} = \partial u_m / \partial y_l$, $p_{y_m} = \partial p / \partial y_m$, $l, m = 1, 2, 3$.

В будущую систему, переопределенную в каждой ячейке, уравнение (5) войдет с весом ξ , который в некоторых пределах влияет на скорость сходимости итерационного процесса и значение которого задается математиком-вычислителем.

Представим приближенное решение в каждой ячейке $\Omega_{i,j,k}$ в виде линейной комбинации базисных векторов-функций φ_l

$$(u_1^s, u_2^s, u_3^s, p^s)^T = \sum_l b_{i,j,k,l}^s \varphi_l \quad (6)$$

с неопределенными коэффициентами, которые будут находиться из решения дискретной задачи и определять численное решение. Здесь индекс T обозначает операцию транспонирования. Явные выражения для базисных функций φ_l даны в табл. 1 (см. также [11]). Для аппроксимации компонент скорости и давления возьмем многочлены, соответственно, второй и первой степени относительно переменных y_1, y_2, y_3 . Базисные функции для составляющих скорости являются соленоидальными, то есть $\text{div} \varphi_l \equiv 0$. Поэтому уравнение неразрывности в каждой ячейке удовлетворено с точностью порядка аппроксимации (многочленами второй степени).

1.3. Вывод переопределенной системы уравнений коллокаций и условий согласования

Количество точек коллокации и их положения внутри каждой ячейки $\Omega_{i,j,k}$ задаются вычислителем, и можно сделать это различными способами. Пусть N_c — количество точек коллокации в ячейке. Здесь реализованы четыре варианта задания точек коллокации: с $N_c = 6$, $N_c = 8$, $N_c = 14$, $N_c = 27$. Например, при $N_c = 6$ координаты точек коллокации таковы: $(\pm\omega, 0, 0)$, $(0, \pm\omega, 0)$, $(0, 0, \pm\omega)$, где ω — заданное вычислителем значение в интервале $0 < \omega < 1$. Подставляя координаты точек коллокации в уравнения (5), получаем в каждой ячейке $3N_c$ уравнений коллокаций:

$$a_{\nu,m}^{(1)} \cdot b_m^{s+1} = f_\nu^s, \quad \nu = 1, \dots, 3N_c; \quad m = 1, \dots, 30. \quad (7)$$

Они являются линейными алгебраическими уравнениями относительно искомых коэффициентов в представлении решения (6). Как и в [11], мы используем на границах каждой ячейки условия согласования решения в ней с решением в соседней ячейке, обеспечивающие единственное кусочно-полиномиальное решение. Эти условия непрерывности решения являются линейными комбинациями вида

$$\begin{aligned} h\partial(u^+)^n/\partial n + \eta_1(u^+)^n &= h\partial(u^-)^n/\partial n + \eta_1(u^-)^n; \\ h\partial(u^+)^{\tau_1}/\partial n + \eta_2(u^+)^{\tau_1} &= h\partial(u^-)^{\tau_1}/\partial n + \eta_2(u^-)^{\tau_1}; \\ h\partial(u^+)^{\tau_2}/\partial n + \eta_2(u^+)^{\tau_2} &= h\partial(u^-)^{\tau_2}/\partial n + \eta_2(u^-)^{\tau_2}; \\ p^+ &= p^-. \end{aligned} \quad (8)$$

В левой части этих соотношений берется решение в рассматриваемой ячейке, а в правой части — решение в соседней ячейке. Здесь $n = (n_1, n_2, n_3)$ — внешняя нормаль к грани ячейки, $(\cdot)^n$, $(\cdot)^{\tau_1}$, $(\cdot)^{\tau_2}$ — нормальные и касательные составляющие вектора скорости по отношению к грани между ячейками, u^+ , u^- — пределы функции u при стремлении ее аргументов к грани ячейки изнутри и снаружи ячейки; η_1, η_2 — неотрицательные параметры, которые могут влиять на обусловленность полученной системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и скорость сходимости решения; $h \frac{\partial}{\partial n} = h \left(n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + n_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = n_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial y_2} + n_3 \frac{\partial}{\partial y_3}$. Точки, в которых записываются уравнения (8), называются точками согласования. Здесь существенно то, что соотношения (8), записанные в рассматриваемой ячейке и записанные в соседней ячейке на той же грани и в той же точке, будут отличаться знаками перед первыми слагаемыми и в левой, и в правой частях, так как внешние нормали на общей грани для соседних ячеек направлены противоположно. Эти уравнения в совокупной СЛАУ дискретной задачи, полученной объединением уравнений, записанных во всех ячейках расчетной области, попарно независимы между собой. Так же, как и в случае точек коллокации, задание количества точек согласования для составляющих вектора решения и их расположения на каждой грани может осуществляться различными способами. Обозначим через N_m количество точек согласования для составляющих скорости на границах каждой ячейки. В данной работе реализованы и испытаны варианты метода с $N_m = 6$, $N_m = 12$, $N_m = 24$. Подставляя координаты точек согласования в каждое из первых трех условий согласования в (8), получаем в каждой ячейке еще $3N_m$ линейных алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов представления решения.

Если грань ячейки совпадает с границей области Ω , то вместо условий согласования на этой грани в точках, которые на других гранях являются точками согласования, записываются граничные условия: $u_m = g_m$, $m = 1, 2, 3$.

Условия согласования для давления задаются в шести точках $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$, $(0, 0, \pm 1)$. Кроме того, для того, чтобы получить единственное решение уравнений Навье–Стокса, здесь значение давления задавалось в начале координат так же, как в [11]. В других вариантах метода КНН вместо последнего на искомом решении задачи аппроксимировалось интегральное соотношение для давления, предложенное Темамом. Таким образом, условия согласования для составляющих скорости и давления дают в совокупности $3N_m + 6 + \delta_i^1 \delta_j^1 \delta_k^1$ линейных алгебраических уравнений в каждой ячейке (i, j, k) , где δ_i^j — символ Кронекера, $\delta_i^j = 1$ при $i = j$ и $\delta_i^j = 0$ при $i \neq j$. Запишем эти уравнения в виде

$$a_{\nu, m}^{(2)} \cdot b_m^{s+1} = g_{\nu}^{s, s+1}, \quad \nu = 1, \dots, 3N_m + 6 + \delta_i^1 \delta_j^1 \delta_k^1; \quad m = 1, \dots, 30. \quad (9)$$

Правые части $g_{\nu}^{s, s+1}$ зависят и от величин b_m^s , вычисленных в соседних ячейках на предыдущей итерации, и от величин b_m^{s+1} , которые только что были вычислены на $s + 1$ -й итерации в некоторых других соседних ячейках.

Введем матрицу $A_{i, j, k}$, которая объединяет матрицы систем (7) и (9), а также вектор-столбец правых частей $\vec{f}_{i, j, k}^{s, s+1}$. В каждой ячейке решается СЛАУ

$$A_{i, j, k} \cdot \vec{b}^{s+1} = \vec{f}_{i, j, k}^{s, s+1}, \quad (10)$$

где $\vec{b}^{s+1} = (b_{i, j, k, 1}^{s+1}, \dots, b_{i, j, k, 30}^{s+1})^T$. Уравнения (9) в этой системе аналогичны граничным условиям для подобластей в известном методе декомпозиции. В данном варианте метода КНН полагалось, что каждая ячейка сетки является подобластью. И для решения задачи в целом здесь применялся альтернирующий метод Шварца, в котором на $s + 1$ -й итерации в каждой ячейке решается переопределенная СЛАУ и последовательно перебираются все ячейки в расчетной области. На $s + 1$ -й итерации в очередной ячейке учитываются величины, которые найдены в соседней ячейке на $s + 1$ -й итерации и которые входят в правые части уравнений для решения в данной ячейке. То есть итерации по нелинейности совмещены с итерационным процессом Гаусса–Зейделя решения СЛАУ дискретной задачи. Для u_i и p в данной работе задавалось нулевое начальное приближение. Матрица $A_{i, j, k}$ содержит $3N_c + 3N_m + 6 + \delta_i^1 \delta_j^1 \delta_k^1$ строк и 30 столбцов. Система (10) в каждой ячейке решается относительно 30 неизвестных $b_{i, j, k, l}^{s+1}$, $l = 1, 2, \dots, 30$ ортогональным методом QR -разложения, где в качестве матрицы Q бралась матрица вращений или отражений Хаусхолдера. Преимущество этого метода по сравнению с методом наименьших квадратов обсуждается ниже в п. 4.

Все эти уравнения были получены на компьютере в Фортран-форме с помощью символьных вычислений в системе MATHEMATICA.

При записи формул для коэффициентов уравнений в окончательном виде полезно осуществить упрощение арифметических выражений полиномиального вида для уменьшения количества арифметических операций, необходимых для их вычисления. С этой целью в работе использованы стандартные функции системы MATHEMATICA, такие, как **Simplify** и **FullSimplify**, для упрощения сложных символьных выражений, возникающих на символьных этапах построения формул

метода. Применение этих функций привело к двух-трехкратному уменьшению длин полиномиальных выражений и, естественно, к сокращению физического времени вычисления их арифметических значений при решении задачи на ЭВМ.

2. Применение СКА для написания подпрограмм численного решения задачи на Фортране

Вычислительные формулы метода КНН для трехмерных уравнений Навье–Стокса громоздки. Поэтому использование мощных СКА, которые без затруднений осуществляют многие преобразования выражений в символьном виде “автоматически”, весьма полезно для вывода формул. При этом удастся избежать многих ошибок, которые зачастую допускаются из-за необходимости усиленного внимания и продолжительности рутинной работы при выводе больших формул “вручную”. В данной работе была написана программа на языке системы MATHEMATICA, с помощью которой были получены все основные расчетные формулы вариантов метода КНН, испытанные в работе. Ниже мы кратко опишем основные шаги работы этой программы с приведением соответствующих ее фрагментов.

Шаг 1. Задание выражений для базисных функций φ_l в соответствии с табл. 1. Вот фрагмент *Mathematica*-программы, в котором задаются первые пять из тридцати базисных функций:

```
fi[[1]] = {1, 0, 0, 0}; fi[[2]] = {0, 1, 0, 0}; fi[[3]] = {0, 0, 1, 0};
fi[[4]] = {y1, -y2, 0, 0}; fi[[5]] = {0, y1, 0, 0};
```

Шаг 2. Разложение решения в заданном базисе φ_l . Например, составляющая скорости вдоль оси x_1 задается так:

```
U1 = Sum[a[[s]]*fi[[s]][[1]], {s, 30}];
```

Здесь $a[[s]]$ — коэффициент разложения по базису, он предполагается известным на предыдущей s -й итерации. Решение на следующей итерации, которое надо найти, задается аналогично:

```
u1 = Sum[b[[i]]*fi[[i]][[1]], {i, 30}];
```

Здесь $b[[i]]$ — коэффициенты разложения, которые надо найти по методу КНН.

Шаг 3. Проверка того факта, что построенные разложения составляющих вектора скорости удовлетворяют уравнению неразрывности:

```
Continuity = Simplify[D[u1, y1] + D[u2, y2] + D[u3, y3]];
Print["Continuity_appr(y1,y2,y3) = ", Continuity];
```

Шаг 4. Символьное вычисление левых частей уравнений количества движения. Они понадобятся при вычислении уравнений коллокаций. Проиллюстрируем соответствующие аналитические вычисления на примере уравнения количества движения для u_1 :

```
lapu1 = D[u1, {y1, 2}] + D[u1, {y2, 2}] + D[u1, {y3, 2}];
convuU1 = U1*D[u1, y1] + U2*D[u1, y2] + U3*D[u1, y3];
cnvUu1 = u1*D[U1, y1] + u2*D[U1, y2] + u3*D[U1, y3];
```

```

convUU1 = U1*D[U1, y1] + U2*D[U1, y2] + U3*D[U1, y3];
equ1 = lapu1 - R*h*(D[q, y1] + convuU1 - convUU1 + cnvUu1 + h*f1);
equ1d = Expand[equ1*csi];
equ1d = equ1d /. {csi*h*R -> s, csi*h^2*R -> h*s};

```

Здесь $R \stackrel{def}{=} Re$, $csi \stackrel{def}{=} \xi$. Далее, с целью сокращения в записи длин выражений коэффициентов уравнений коллокации вводится промежуточное обозначение s . Аналогично вводятся некоторые другие переобозначения с целью оптимизации формул приближенного аналитического решения в терминах арифметических операций (соответствующие фрагменты программы не приводятся в целях экономии места). Как показали численные эксперименты, использование промежуточных обозначений для часто повторяющихся подвыражений, а также встроенной функции `FullSimplify` позволяет в два-три раза сократить время счета при численном решении уравнений Навье–Стокса по методу КНН.

Шаг 5. Вычисление коэффициентов уравнений коллокаций и их запись в Фортран-форме во внешний файл `colloc1.txt`. Этот шаг является наиболее трудоемким с точки зрения требуемого объема символьных вычислений на компьютере. Проиллюстрируем эти вычисления на примере уравнения коллокации, соответствующего уравнению количества движения для составляющей скорости u_1 :

```

SetDirectory["D:\\papers\\Yaros14"];
eNS1 = Table[0, {30}];
Do[e11 = Coefficient[equ1d, b[[m]]]; eNS1[[m]] = e11, {m, 30}];
Print["coef(b1) = ", FullSimplify[eNS1[[1]]]];
"      s = csi*h*R" >> colloc1.txt;
"      AR(m,1) = " >>> colloc1.txt;
e11 = Simplify[eNS1[[1]]];
FortranForm[e11] >>> colloc1.txt;
Do[eq = "      AR(m, "; eq = eq <> ToString[m] <> ") = ";
  eq >>> colloc1.txt; e11 = FullSimplify[eNS1[[m]]];
  FortranForm[e11] >>> colloc1.txt, {m, 2, 30}];

```

Здесь $AR(m, r)$ — элемент матрицы $A_{i,j,k}$ переопределенной системы (10).

Шаг 6. Проверка правильности вычисления элементов $AR(m, r)$, $r=1, \dots, 30$. Для этого составляется сумма произведений указанных элементов на соответствующие коэффициенты разложения b_1, \dots, b_{30} и затем эта сумма сравнивается с исходным уравнением `equ1d`, полученным на шаге 4.

Шаг 7. Символьные вычисления условий согласования (8) на гранях $y_1 = -1$, $y_1 = 1$ ячейки расчетной сетки и их запись в Фортран-форме во внешний файл `match1.txt`. Проиллюстрируем этот шаг на примере рассмотрения случая, когда грань $y_1 = \pm 1$ лежит на границе расчетной области, и в правой части условия — значение соответствующей компоненты скорости:

```

matNS1 = Table[0, {30}];
Do[e11 = Coefficient[u1, b[[m]]]; matNS1[[m]] = Simplify[e11], {m, 30}];
Do[eq = "      AR(i, "; eq = eq <> ToString[m] <> ") = ";
  e11 = matNS1[[m]]; e1f = FortranForm[e11];
  eq <> ToString[e1f] >>> match1.txt, {m, 30}];
"      BR(i) = uex1(x1m,x2m,x3m)" >>> match1.txt;

```


Здесь $ueh1(x1m, x2m, x3m)$ — обозначение функции g_1 в граничном условии; $BR(i)$ — правая часть уравнения. Аналогично вычисляются уравнения согласования на остальных четырех гранях и для остальных составляющих вектора скорости.

Работа всей *Mathematica*-программы занимает только две минуты времени на настольном компьютере с тактовой частотой 3 ГГц.

Результатом работы Фортран-программы является кусочно-полиномиальное решение в виде конкретного в каждой ячейке сетки многочлена от трех переменных с числовыми коэффициентами. Его можно дифференцировать и интегрировать точно без применения приближенных численных процедур, которые вносят в результаты этих операций дополнительные погрешности.

Для отрисовки графиков численного решения и некоторого его анализа используется снова СКА. Такой интерфейс между СКА и языком численного решения задач позволяет математику-вычислителю избежать многих ошибок на всех этапах работы, снижает необходимое напряжение его усилий, связанное с требуемым повышенным вниманием и объемом рутинной работы, и ускоряет ее в целом.

3. Алгоритм ускорения сходимости итераций на основе подпространств Крылова

Для ускорения сходимости итераций, используемых для построения приближенного решения, здесь применен новый вариант [9] известного метода [8, 9, 12–14], основанного на подпространствах Крылова [12]. Различные варианты этого метода описаны в [14]. Приведем формулы нового варианта, используя для удобства пояснений итерационный процесс

$$\vec{X}^{n+1} = T\vec{X}^n + \vec{f}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (11)$$

решения СЛАУ $A\vec{X} = \vec{d}$, где A , T — квадратные вещественные матрицы, \vec{f} , \vec{d} — векторы правых частей, \vec{X}^n — приближение к решению на итерации с номером n . Пусть итерационный процесс (11) сходится, и система $A\vec{X} = \vec{d}$ эквивалентна системе

$$\vec{X} = T\vec{X} + \vec{f}. \quad (12)$$

Подставляя значение \vec{X}^n в систему (12) и учитывая (11), имеем невязку уравнения (12) на n -й итерации $\vec{r}^n = T\vec{X}^n + \vec{f} - \vec{X}^n = \vec{X}^{n+1} - \vec{X}^n$. Используя последнее соотношение, нетрудно показать, что для погрешности решения на n -й итерации $\vec{Z}^n = \vec{X} - \vec{X}^n$ имеет место соотношение $\vec{Z}^{n+1} = T\vec{Z}^n$ и аналогично для невязки $T\vec{r}^n = \vec{r}^{n+1}$. Учитывая последние соотношения, после несложных преобразований можно также показать, что при любом n имеет место уравнение

$$(T^{-1} - E)\vec{Z}^{n+1} = \vec{r}^n. \quad (13)$$

В рассматриваемом методе на $k+1$ -й итерации ищется $\vec{Y}^{k+1} = \sum_{i=1}^k \alpha_i \vec{r}^i$ как приближенное значение погрешности \vec{Z}^{k+1} . Из требования, чтобы приближенное значение погрешности при $n = k$ удовлетворяло уравнению (13), следует СЛАУ относительно искомых α_i

$$(\vec{r}^1 - \vec{r}^0) \alpha_1 + \dots + (\vec{r}^k - \vec{r}^{k-1}) \alpha_k = -\vec{r}^k. \quad (14)$$

Ее решение α_i , $i = 1, 2, \dots, k$ позволяет уточнить приближение к решению СЛАУ (12), полученное на $k + 1$ итерации, полагая $\vec{X} \approx \vec{X}^{*k+1} = \vec{X}^{k+1} + \vec{Y}^{k+1}$. Этот прием существенно ускоряет сходимость итераций решения СЛАУ (12). Его применение не зависит от способа записи итерационного процесса решения заданного СЛАУ $A\vec{X} = \vec{d}$. Пусть СЛАУ получена линеаризацией исходной нелинейной задачи. Если итерации по нелинейности совмещены с итерациями решения такой СЛАУ и на отдельной совмещенной итерации коэффициенты нелинейных уравнений исходной задачи по модулю меняются значительно меньше, чем $\|\vec{X}^{k+1} - \vec{X}^k\|$, то изложенный прием может существенно ускорить процесс решения исходной нелинейной задачи. Как показало большое количество проведенных численных экспериментов по применению этого алгоритма при решении уравнений Навье–Стокса, в зависимости от числа Re и значения k достигалось более чем пятикратное уменьшение времени решения. При $Re = 1000$ с ростом k до 10 ускорение процесса итераций нарастало. Применение данного алгоритма поправки k -й итерации с $k > 20$ не давало заметного дальнейшего ускорения процесса в сравнении со случаями $k \leq 10$.

По мере сходимости итераций вектор невязки \vec{r}^n убывает, и система (14) становится все хуже и хуже обусловленной. Чтобы точность вычисления поправок не падала катастрофически, в области малых невязок необходимы дополнительные приемы. Сначала делается нормировка столбцов матрицы системы (14), чтобы избежать арифметических действий с числами, близкими к машинному нулю. Проводится замена неизвестных $\beta_i = \alpha_i \|\vec{r}^i - \vec{r}^{i-1}\|_2$, $i = 1, \dots, k$. В результате СЛАУ (14) принимает вид

$$B\vec{\beta} = (\vec{B}_1) \beta_1 + \dots + (\vec{B}_k) \beta_k = -\vec{r}^k, \quad (15)$$

где $\vec{B}_i = (\vec{r}^i - \vec{r}^{i-1}) / \|\vec{r}^i - \vec{r}^{i-1}\|_2$ – столбцы матрицы B , $i = 1, \dots, k$. В [8] система (14) решалась методом наименьших квадратов (МНК). Известно, что МНК дает псевдорешение переопределенной системы, на котором среди всех ее псевдорешений достигается минимум невязки. В данном случае это решение системы $B^T B \vec{\beta} = -B^T \vec{r}^k$, где верхний индекс T у матрицы обозначает ее транспонирование. Но недостатком МНК является то, что при этом обусловленность матрицы $B^T B$ может быть много хуже, чем обусловленность матрицы B . Здесь, как и в [9], (15) решается QR –разложением с выбором главного элемента в столбце при построении матрицы Q . И решение системы (15) сводится к решению системы $R\vec{\beta} = -Q^T \vec{r}^k$. При этом обусловленность матрицы R равна обусловленности матрицы B . Нетрудно показать, что при некотором выборе расположения уравнений в системе (15) псевдорешения, полученные методом МНК и QR –разложением, совпадают при отсутствии ошибок округлений в их вычислениях. В этом существенное преимущество данной реализации алгоритма ускорения итераций, которое делает вычисление поправок по Крылову более устойчивым в области малых невязок. Изложение еще одного приема для увеличения устойчивости построения подпространства Крылова, который также применялся в [9], здесь за недостатком места опустим.

Уточненный вектор $k+1$ -го приближения \vec{X}^{*k+1} используется в качестве начального приближения для дальнейшего продолжения последовательности итераций.

Одним из достоинств рассматриваемого метода ускорения итераций является то, что он легко может быть применен к уже запрограммированным итерационным

процессам. Для этого достаточно внести в существующую программу небольшую процедуру подсчета поправки \vec{Y}^{k+1} в соответствии с изложенным выше.

4. Результаты численных расчетов

4.1. Тест с точным аналитическим решением

Рассмотрим следующее точное решение уравнений Навье–Стокса (1) в кубической области (2):

$$\begin{aligned} u_1 &= -\cos(\sigma x_1) \sin(\sigma x_2) \sin(\sigma x_3), & u_2 &= 0.5 \sin(\sigma x_1) \cos(\sigma x_2) \sin(\sigma x_3), \\ u_3 &= 0.5 \sin(\sigma x_1) \sin(\sigma x_2) \cos(\sigma x_3), \\ p &= \cos(\sigma x_1) + \cos(\sigma x_2) + \cos(\sigma x_3) - 3 \sin(\sigma X)/(\sigma X), \end{aligned} \quad (16)$$

где σ – заданный параметр. Решение (16) удовлетворяет уравнению неразрывности $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$. Соответствующие решению (16) правые части f_1, f_2, f_3 уравнений (1) имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{\sigma}{\operatorname{Re}} \left\{ \operatorname{Re} \sin(\sigma x_1) \left[\cos(\sigma x_1) \left(\frac{1}{2} \sin^2(\sigma x_2) \cos^2(\sigma x_3) + \frac{1}{2} \sin^2(\sigma x_3) \cos^2(\sigma x_2) \right) + 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \sin(\sigma x_2) \sin(\sigma x_3) \left[\frac{1}{2} \operatorname{Re} \sin(2\sigma x_1) \sin(\sigma x_2) \sin(\sigma x_3) + 3\sigma \cos(\sigma x_1) \right] \right\}, \\ f_2 &= \frac{\sigma}{\operatorname{Re}} \left\{ \operatorname{Re} \sin(\sigma x_2) \left[\cos(\sigma x_2) \left(\frac{1}{2} \sin^2(\sigma x_3) \cos^2(\sigma x_1) - \frac{1}{4} \sin^2(\sigma x_1) \cos^2(\sigma x_3) \right) + 1 \right] \right. \\ &\quad \left. + \sin(\sigma x_1) \sin(\sigma x_3) \left[\frac{1}{8} \operatorname{Re} \sin(\sigma x_1) \sin(2\sigma x_2) \sin(\sigma x_3) - \frac{3}{2} \sigma \cos(\sigma x_2) \right] \right\}, \\ f_3 &= \frac{\sigma}{\operatorname{Re}} \left\{ \frac{1}{8} \operatorname{Re} \sin^2(\sigma x_1) \sin(2\sigma x_3) \sin^2(\sigma x_2) + \operatorname{Re} \sin(\sigma x_3) \right. \\ &\quad \left. + \cos(\sigma x_3) \left[-\frac{1}{4} \operatorname{Re} \sin(\sigma x_3) \sin^2(\sigma x_1) \cos^2(\sigma x_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \sin^2(\sigma x_2) \sin(\sigma x_3) \cos^2(\sigma x_1) - \frac{3}{2} \sigma \sin(\sigma x_2) \sin(\sigma x_1) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Чтобы определить погрешность метода на конкретной равномерной сетке, как и в [11], вычислялись среднеквадратичные погрешности компонентов вектора решения $\delta \mathbf{u}(h)$ и $\delta p(h)$. Порядки сходимости решения ν_u и ν_p на последовательности сеток при мельчении шага сетки вычислялись также по формулам, приведенным в [11]. Для окончания итераций по нелинейности использовалось условие $\delta b^{n+1} < \varepsilon$, где

$$\delta b^{n+1} = \max_{i,j,k} \left(\max_{1 \leq l \leq 30} |b_{i,j,k,l}^{n+1} - b_{i,j,k,l}^n| \right), \quad (17)$$

ε — малое положительное число, задаваемое вычислителем, $\varepsilon \ll h^2$. Величина δb^{n+1} непосредственно связана зависимостью с погрешностью решения задачи. В

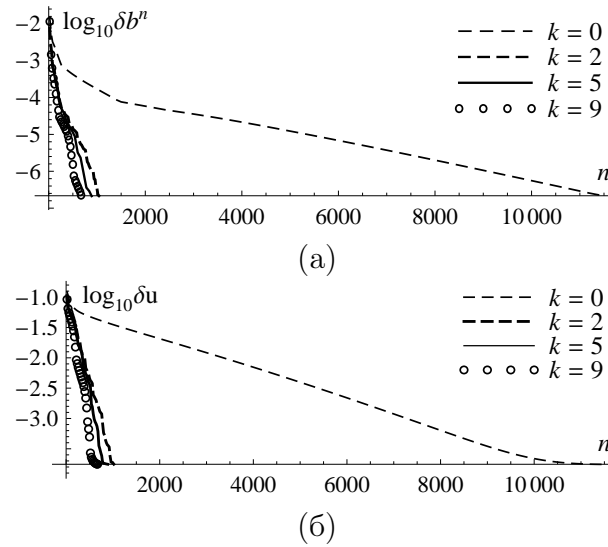


Рис. 1. Влияние величины k в (14) на скорость сходимости метода КНН: (а) логарифм ошибки δb^n ; (б) логарифм ошибки δu

Таблица 2. Ошибки δu , δp и порядки сходимости ν_u, ν_p на последовательности сеток, $Re = 100$, $X = 1.0$, $\sigma = 0.5$

M	δu	δp	ν_u	ν_p
10	$0.227 \cdot 10^{-4}$	$0.166 \cdot 10^{-2}$		
20	$0.435 \cdot 10^{-5}$	$0.710 \cdot 10^{-3}$	2.38	1.23
30	$0.164 \cdot 10^{-5}$	$0.437 \cdot 10^{-3}$	2.41	1.20
40	$0.847 \cdot 10^{-6}$	$0.312 \cdot 10^{-3}$	2.30	1.17

эту зависимость погрешности от δb^{n+1} в множитель перед последней входит обусловленность задачи.

Рис. 1 иллюстрирует влияние величины k в (14) на скорость сходимости метода КНН при числе Рейнольдса $Re = 1000$. Эти расчеты были сделаны на сетке из $20 \times 20 \times 20$ ячеек; $\sigma = 1$ в (16), $\eta_1 = \eta_2 = 2$ в (8), $\xi = 0.01$ в (5). Критерием окончания расчета было выполнение неравенства $\delta b^n < 2 \cdot 10^{-7}$. Случай $k = 0$ соответствует расчету без использования алгоритма Крылова. Видно, что скорость сходимости численного решения по методу КНН растет с увеличением числа невязок k , применяемых в методе Крылова. Количество итераций, необходимых для удовлетворения неравенства $\delta b^n < 2 \cdot 10^{-7}$, было меньше при $k = 2, k = 5$ и $k = 9$, чем в случае, когда алгоритм Крылова не применялся, в 11, 13 и 17 раз соответственно.

Таблица 3. Ошибки δu , δp и порядки сходимости ν_u, ν_p на последовательности сеток, $Re = 1000$, $X = 1.0$, $\sigma = 0.5$

M	δu	δp	ν_u	ν_p
20	$0.138 \cdot 10^{-4}$	$0.712 \cdot 10^{-3}$		
40	$0.339 \cdot 10^{-5}$	$0.308 \cdot 10^{-3}$	2.03	1.21

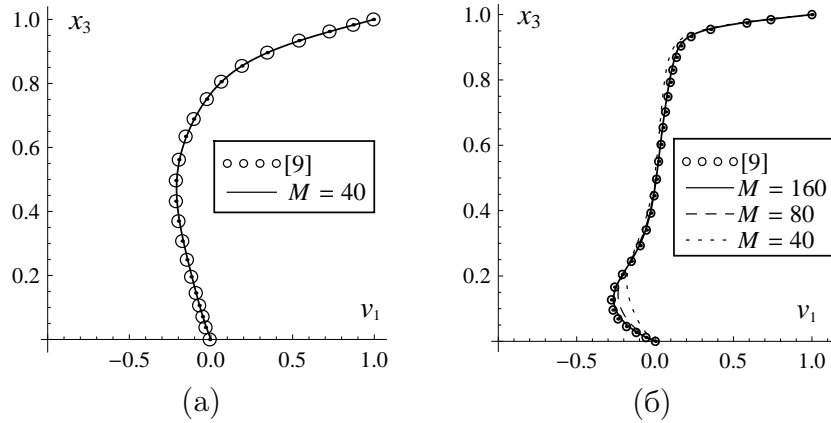


Рис. 2. Профили составляющей скорости v_1 на центральной линии куба $x_1 = x_2 = 0.5$ при $Re = 100$ (а) и $Re = 1000$ (б)

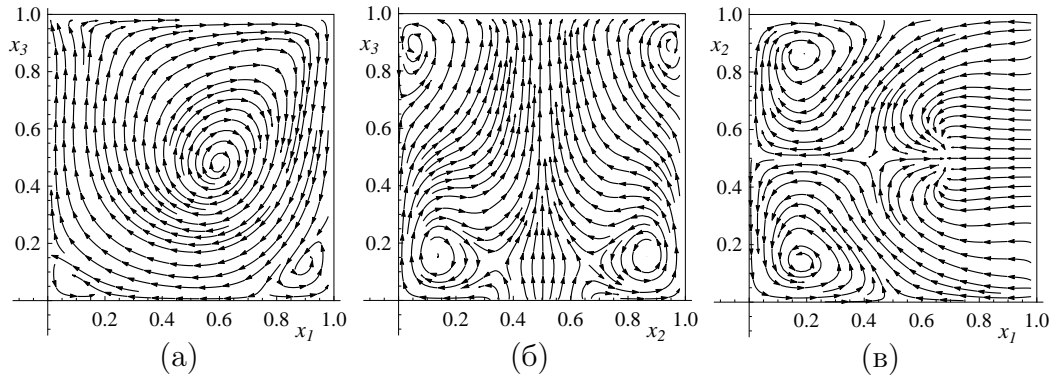


Рис. 3. Псевдoliniи тока в различных сечениях кубической каверны при $Re = 1000$: (а) сечение $x_2 = 0.5$; (б) сечение $x_1 = 0.5$; (в) сечение $x_3 = 0.5$

Численные результаты, представленные в таблицах 2 и 3, были получены со значением $\omega = 1/2$ при задании точек коллокации; $\eta_1 = \eta_2 = 3$ в (8); $\xi = 0.01$ и $\xi = 0.005$ в (5) для таблиц 2 и 3 соответственно. Из табл. 2 и 3 видно, что при рассмотренных числах Рейнольдса $Re = 100$ и $Re = 1000$ обеспечивается второй порядок сходимости составляющих вектора скорости и первый порядок сходимости для давления. Более низкий порядок сходимости метода КНН для давления объясняется тем, что для аппроксимации давления используются многочлены первой степени, см. табл. 1.

Следует заметить, что при применении метода КНН для решения любых задач важно, чтобы уравнения переопределенной системы, которые играют одинаковую роль в приближенном решении, имели примерно равные весовые коэффициенты.

4.2. Течение в кубической каверне с движущейся крышкой

Рассмотрим течение вязкой несжимаемой жидкости в кубической каверне. Расчетная область — куб (2). Начало координат лежит в одном из углов куба, и ось Ox_3 направлена вверх. Верхняя крышка куба движется в безразмерных координатах с постоянной скоростью $v = 1$ в положительном направлении оси Ox_1 . Остальные грани куба (2) покоятся. На всех гранях куба заданы условия прилипания, при

этом на верхней грани $x_3 = X$ компоненты скорости $v_1 = 1, v_2 = v_3 = 0$, и $v_m = 0$, $m = 1, 2, 3$ на остальных гранях.

Некоторые результаты численных расчетов рассматриваемой задачи были представлены в [11] при числе Рейнольдса $Re = 100$. На рис. 2 и 3 представлены некоторые результаты при числах Рейнольдса $Re = 100$ и $Re = 1000$.

Высокоточные численные решения задачи о течении в кубической каверне с движущейся крышкой, полученные в [15], являются в настоящее время единственными эталонными решениями данной задачи. Расчеты были выполнены в [15] по методу, представляющему собой обобщение метода [16] на случай трех пространственных переменных. Поля течения сингулярны вдоль ребер между движущейся стенкой и стационарными стенками. Эти сингулярности ухудшают сходимость численного метода и точность окончательного решения. Поэтому в [15] применялась суперпозиция стационарных локальных асимптотических решений для всех сингулярных ребер и остального гладкого решения. На рис. 2 также показаны для сравнения решения, полученные в [15]. Видно, что численное решение по методу КНН хорошо совпадает с результатом работы [15] несмотря на то, что здесь не применялось исключение особенности решения в окрестности сингулярных ребер, как это делалось в [9, 15]. На рис. 2, (б) показана динамика сходимости решения при увеличении числа ячеек M в каждом пространственном направлении.

Для наглядного графического представления результатов трехмерных расчетов и структуры течения здесь использованы так называемые “псевдолинии тока”. Дадим определение этого понятия. Спроектируем вектор скорости каждой частицы жидкости, лежащей в выбранной плоскости, на эту плоскость. Назовем линии, касательные к векторам полученного плоского поля, псевдолиниями тока. На рис. 3 представлены картины псевдолиний тока в различных сечениях, и только в сечении $x_2 = 0.5$ – плоскости симметрии течения псевдолинии тока совпадают с линиями тока. Псевдолинии тока, представленные на рис. 3, были получены на сетке из $80 \times 80 \times 80$ ячеек с помощью *Mathematica*-функции `ListStreamPlot[...]`.

5. Заключение

Представлен новый вариант метода КНН для численного решения трехмерных уравнений Навье–Стокса, описывающих стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости. Большой объем символьных вычислений, который требуется для программной реализации метода, был успешно выполнен с помощью программы, написанной на языке системы *Mathematica*. Применение СКА существенно облегчило эту работу, ускорило ее и снизило вероятность ошибок, обычно допускаемых математиком-вычислителем при разработке нового сложного алгоритма.

Верификация точности метода путем решения известной эталонной задачи о течении в кубической каверне с движущейся крышкой и сравнение с наиболее точными опубликованными решениями этой задачи [15], полученными другими исследователями, показали высокую точность построенного метода. Это подчеркнуло дополнительно эффективность и полезность использования систем компьютерной алгебры для построения новых аналитическо-численных методов.

Список литературы

1. *Wesseling P.* Principles of Computational Fluid Dynamics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
2. *Ferziger J.H., Perić M.* Computational Methods for Fluid Dynamics, 3rd Edition. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
3. *Бурого Н.Г.* Вычислительная механика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012 (English transl.: *Burago N.G.* Computational Mechanics. Moscow: published by Moscow State Techn. University named after N.E. Bauman, 2012.).
4. *Быстров Ю.А., Исаев С.А., Кудрявцев Н.А., Леонтьев А.И.* Численное моделирование вихревой интенсификации теплообмена в пакетах труб. Санкт-Петербург: Судостроение, 2005. (English transl.: *Bystrov Yu.A., Isaev S.A., Kudryavtsev N.A., Leontiev A.I.* Numerical Modeling of Vortex Intensification of Heat Exchange in Pipe Packages. St. Petersburg: Sudostroenie, 2005.)
5. *Girault V., Raviart P.A.* Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations: Theory and Algorithms. Springer-Verlag, London, 2011.
6. *Черный С.Г., Чирков Д.В., Лапин В.Н., Скороспелов В.А., Шаров С.В.* Численное моделирование течений в турбомашинах. Новосибирск: Наука, 2006. (English transl.: *Cherny S.G., Chirkov D.V., Lapin V.N., Skorospelov V.A.* Numerical Modeling of Flows in Turbomachines. Novosibirsk: Nauka, 2006.)
7. *Слепцов А.Г.* Коллокационно-сеточное решение эллиптических краевых задач // Моделирование в механике. 1991. Т. 5(22), №2. С. 101–126. (English transl.: *Sleptsov A.G.* Collocation-grid solution of elliptic boundary-value problems // Modelirovanie v mekhanike. 1991. V. 5(22), No. 2. P. 101–126.)
8. *Семин Л.Г., Слепцов А.Г., Шанеев В.П.* Метод коллокаций – наименьших квадратов для уравнений Стокса // Вычисл. технологии. 1996. Т. 1, № 2. С. 90–98. (English transl.: *Semin L.G., Sleptsov A.G., Shapeev V.P.* Collocation and least-squares method for Stokes equations // Computat. Technologies. 1996. V. 1, No. 2. P. 90–98.)
9. *Исаев В.И., Шанеев В.П.* Варианты метода коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для численного решения уравнений Навье–Стокса // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 10. С. 1758–1770. (English transl.: *Isaev V.I., Shapeev V.P.* High-accuracy versions of the collocations and least squares method for the numerical solution of the Navier–Stokes equations // Computat. Math. and Math. Phys. 2010. V. 50, No. 10. P. 1670–1681.)
10. *Исаев В.И., Шанеев В.П.* Метод коллокаций и наименьших квадратов повышенной точности для решения уравнений Навье–Стокса // Докл. Академии наук. 2012. Т. 442, №4. С. 442–445. (English transl.: *Isaev V.I., Shapeev V.P.* High-order accurate collocations and least squares method for solving the Navier - Stokes equations // Dokl. Math. 2012. V. 85. P. 71–74.)
11. *Shapeev V.P., Vorozhtsov E.V.* Symbolic-numeric implementation of the method of collocations and least squares for 3D Navier–Stokes equations // Gerdt V.P., Koepf W., Mayr E.W., Vorozhtsov E.V. (eds.) CASC 2012. LNCS. 2012. V. 7442. P. 321–333. Springer, Heidelberg.

12. *Крылов А.Н.* О численном решении уравнения, которым в технических вопросах определяются частоты малых колебаний материальных систем // Изв. АН СССР, Отд. матем. и естеств. наук. 1931. № 4. С. 491–539. (English transl.: *Krylov A.N.* On the numerical solution of the equation, which determines in technological questions the frequencies of small oscillations of material systems // Izv. AN SSSR, otd. matem. i estestv. nauk. 1931. No. 4. P. 491–539.)
13. *Слепцов А.Г.* Об ускорении сходимости линейных итераций. II // Моделирование в механике. Новосибирск, 1989. Т. 3, № 5. С. 118–125. (English transl.: *Sleptsov A.G.* On convergence acceleration of linear iterations. II // Modelirovanie v mekhanike. 1989. V. 3, No. 5. P. 118–125.)
14. *Saad Y.* Numerical Methods for Large Eigenvalue Problems. Manchester University Press, Manchester, 1991.
15. *Albensoeder S., Kuhlmann H.C.* Accurate three-dimensional lid-driven cavity flow // J. Comput. Phys. 2005. V. 206. P. 536–558.
16. *Botella O., Peyret R.* Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow // Comput. Fluids. 1998. V. 27. P. 421–433.

Application of Computer Algebra Systems to the Construction of the Collocations and Least Residuals Method for Solving the 3D Navier–Stokes Equations

Shapeev V. P., Vorozhtsov E. V.

*Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Institutskaya str., 4/1, Novosibirsk, 630090, Russia*

Keywords: three-dimensional Navier–Stokes equations, the method of collocations and least residuals, computer algebra, cubic cavity flow, Krylov’s subspaces

The method of collocations and least residuals (CLR), which was proposed previously for the numerical solution of two-dimensional Navier–Stokes equations governing the stationary flows of a viscous incompressible fluid, is extended here for the three-dimensional case. The solution is sought in the implemented version of the method in the form of an expansion in the basis solenoidal functions. At all stages of the CLR method construction, a computer algebra system (CAS) is applied for the derivation and verification of the formulas of the method and for their translation into arithmetic operators of the Fortran language. For accelerating the convergence of iterations a sufficiently universal algorithm is proposed, which is simple in its implementation and is based on the use of the Krylov’s subspaces. The obtained computational formulas of the CLR method were verified on the exact analytic solution of a test problem. Comparisons with the published numerical results of solving the benchmark problem of the 3D driven cubic cavity flow show that the accuracy of the results obtained by the CLR method corresponds to the known high-accuracy solutions.

Сведения об авторах:

Шапеев Василий Павлович,

Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН,
доктор физ.-мат. наук, профессор;

Ворожцов Евгений Васильевич,

Институт теоретической и прикладной механики
им. С. А. Христиановича СО РАН,
доктор физ.-мат. наук, профессор